Труды Петрозаводского государственного университета

Серия "Математика" Выпуск 1, 1993 г.

УДК 519.21

Фомин А.С.

ЛОКАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ О ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ

В настоящей работе дается некоторое обобщение предыдущего результата автора [4]. С его использованием уточняется один из известных результатов работы [2], а именно, вместо установленной ранее асимптотической нормальности случайной величины $B^{-1}(W_n-\mu_n)$ для нее доказана локальная предельная теорема.

Пусть генеральная совокупность содержит n различных элементов; W_n – объем выборки с возвращением, при котором получено a_n+1 различных элементов, $0 \leqslant a_n < n$. Обозначим:

$$b_n = n-a_n, \quad \alpha_n = \frac{a_n}{n}, \quad \beta_n = \frac{\beta_n}{n}, \quad \mu_n = MW_n, \quad B_n^2 = \mathcal{D}W_n, \quad \gamma_n^3 = MW_n^3.$$

Известно (см. [1]), что

$$W_n = \xi_{\frac{n}{n}} + \xi_{\frac{n-1}{n}} + \ldots + \xi_{\frac{b_n}{n}},$$

где ξ_p $(0 < p \leqslant 1)$ – независимые случайные величины (сл.в.) с геометрическим распределением:

$$\mathcal{P}\{\xi_p = K\} = q^{k-1}p, \ q=1-p, \ k=1,2,\ldots, \ p = \frac{n}{n}, \frac{n-1}{n}, \ldots, \frac{b_n}{n}.$$

В работе [2] показано, что

$$B_n^2 = \frac{n}{\beta_n}\,(1-\beta_n+\beta_n \ln \beta_n) + \frac{6\cdot\theta_1}{\beta_n^2}, \text{ где } |\theta_1|<1. \tag{1}$$

Аналогично устанавливается, что

$$\gamma_n^3 = \frac{n}{\beta_n}\,[3(1-\beta_n)^2 + \beta_n^2 \ln \beta_n) + \frac{43\cdot\theta_2}{\beta_n^3}, \text{ где } |\theta_2|<1. \tag{2}$$

В той же работе [2] доказана асимптотическая нормальность сл.в. $B_n^{-1}(W_n-\mu_n)$. Этот результат отдельно доказывается для следующих трех случаев:

$$1)\ \begin{matrix} 0<\alpha_n<1 \\ 0<\beta_n<1 \end{matrix}\ ;\quad 2)\ \begin{matrix} \alpha_n\to 0 \\ n\to\infty \end{matrix}\ ;\quad 3)\ \begin{matrix} \beta_n\to 0 \\ n\to\infty \end{matrix}\ .$$

В работе [3] доказана локальная предельная теорема с оценкой остаточного члена для случая 1). Настоящая статья посвящена доказательству локальной теоремы для случаев 2) и 3). Основной результат - это

Теорема 1. Пусть при $n\to\infty$

$$1)\ \alpha_n\to 0;\quad \alpha_n\geqslant c_1\frac{n^{\varepsilon_1}}{\sqrt[4]{n}}\ ,\ 0<\varepsilon_1<\frac{1}{4}\quad \text{или} \tag{3}$$

$$2)\ \beta_n\to 0;\quad \beta_n\geqslant c_2\frac{n^{\varepsilon_2}}{n}\ ,\ 0<\varepsilon_2<1. \tag{4}$$

Тогда, как в первом, так и во втором случае, при $n\to\infty$

$$\sup_{N\in\mathbb{N}}\left|\,B_n\cdot\mathcal{P}\{W_n=N\}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(N-\mu_n)^2}{2\cdot B_n^2}\right\}\right|\to 0.$$

Теорему 1 мы получили из следующего результата. Пусть $\{\xi_k^{(n)}\}_{k=1}^n$ - n-я серия целочисленных независимых сл.в.,

$$S_n=\sum_{k=1}^n\xi_k^{(n)};\ A_n=MS_n;\ B_n^2=\mathcal{D}S_n;\ \beta_k^{(n)}=M|\xi_k^{(n)}-M\xi_k^{(n)}|^3<\infty,$$

$$k=1,2,\ldots,n;\ L_n=B_n^{-3}\sum_{k=1}^n\beta_k^{(n)}.$$

Тогда имеет место

Теорема 2. Пусть при $n\to\infty$

1) $B_n\to\infty$;

2) $\sum_{k=1}^n\beta_k^{(n)}=O(B_n^3)$;

существует абсолютная постоянная $K>0$ такая, что если для любого целого $q\geqslant 2$

3) $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\max\limits_{0\leqslant r\leqslant q-1}\mathcal{P}\{\xi_k^{(n)}\equiv r(\mathrm{mod}\ q)\}\leqslant 1-K\cdot\max\{L_n^2B_n^2,B_n^2\}\cdot\frac{\ln n}{n}$,

то равномерно по $N\in\mathbb{N}$ при $n\to\infty$

$$\left|B_n\cdot\mathcal{P}\{S_n=N\}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(N-A_n)^2}{2\cdot B_n^2}\right\}\right|=O(1). \qquad (5)$$

Теорема 2 доказана в работе [4] для частного случая: $M\,\xi_k^{(n)}=0$, $k=1,2,\dots,n$, $A_n=0$. Несложно передоказать ее и для общего случая: $M\,\xi_k^{(n)}=m_k$, $k=1,\dots,n$, $A_n=M\,S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}m_k$. Действительно, рассмотрим выражение

$$\Delta_n=B_n\cdot\mathcal{P}\{S_n=N\}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(N-A_n)^2}{2\cdot B_n^2}\right\}.$$

Из формулы Лапласа-Пуассона

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

и формулы обращения

$$\mathcal{P}\{S_n=N\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itN}\,\phi_n(t)\,dt,$$

где $\phi_n(t)=\phi_{S_n}(t)$ – характеристическая функция сл.в. S_n, обозначая также $\mathcal{P}\{S_n=N\}=\mathcal{P}_n(N)$ и $x=B_n^{-1}(N-A_n)$, получим

$$\Delta_n=\frac{1}{2\pi}\left(B_n\int_{-\pi}^{\pi}e^{-itN}\,\phi_n(t)\,dt-\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx-\frac{t^2}{2}}\,dt\right).$$

Введя новую переменную $t=2\pi y$, изменив пределы интегрирования и проделав очевидные преобразования, получим

$$\Delta_n=\frac{1}{2\pi}\left[B_n\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}e^{-2\pi it(xB_n+A_n)}\varphi_n(2\pi t)\,dt-\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2\pi itx-2\pi^2t^2}\,dt\right].$$

Проделав обычную для такого доказательства группировку, имеем:

$$\Delta_n = \frac{B_n}{2\pi} \cdot \int\limits_{\frac{H_n}{B_n}\leqslant |t| \leqslant \frac{1}{2}} e^{-2\pi i t(xB_n+A_n)} \varphi_n(2\pi t)\, dt +$$

$$+ \frac{B_n}{2\pi} \cdot \int\limits_{|t|\leqslant H_nB_n^{-1}} e^{-2\pi i t x B_n} \left[\varphi_n(2\pi t)\, e^{-2\pi i t A_n} - e^{-2\pi^2 t^2 B_n^2}\right] -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|>H_n} e^{-2\pi i t x - 2\pi^2 t^2}\, dt = J_1 + J_2 - J_3,$$

где J_1, J_2, и J_3 есть соответственно первый, второй и третий интегралы в предыдущем соотношении.

$|J_3|$ оценивается непосредственно, $|J_3|=O(1)$. Интеграл $|J_2|$ оценивается стандартным образом с использованием леммы 1 (см. [5, с. 137]).

Первый интеграл

$$J_1 = \frac{B_n}{2\pi} \cdot \int\limits_{\frac{H_n}{B_n}\leqslant |t| \leqslant \frac{1}{2}} e^{-2\pi i t(xB_n+A_n)} \varphi_n(2\pi t)\, dt =$$

$$= O\left(B_n \cdot \int\limits_{\frac{H_n}{B_n}\leqslant |t| \leqslant \frac{1}{2}} |\varphi_n(2\pi t)|\, dt \right).$$

Подробная оценка этого интеграла сделана в работе [4], где показано, что $J_1=O(1)$. Это заканчивает доказательство теоремы 2.

Теперь легко доказать теорему 1. Для этого, используя условие (3) теоремы 1, а также соотношения (1) и (2), несложной проверкой убеждаемся, что выполнены условия 1), 2) и 3) теоремы 2. А это означает, что для сл.в. W_n также имеет место локальная предельная теорема.

ЛИТЕРАТУРА

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1968. Т.1.

2. Baum L.E., Billingsley P. Asymptotic distributions for the coupon collector's problem // Ann. Math. Stat. 1965. 36. P. 1835-1839.
3. Набиев И. Локальная предельная теорема с оценками остаточного члена в задаче времени ожидания // Исследования по вырождающимся дифференциальным уравнениям и предельным теоремам теории вероятностей. Ташкент, 1985. С. 43-47.
4. Фомин А.С. Локальная теорема для серий независимых, разнораспределенных в серии, целочисленных случайных величин // Вероятностные задачи прикладной математики. Петрозаводск, 1984. С.70-75.
5. Петров В.В. Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.