Синтез плоских планетарных механизмов

Яковлев П.Г.[1]
Петрозаводский государственный университет

В работе выведены новые формулы для синтеза плоских планетарных зубчатых механизмов по условиям осуществления заданного передаточного отношения и соосности.

Ключевые слова: *планетарный механизм, передаточное отношение, условие соосности, синтез механизма.*

ВВЕДЕНИЕ

Наиболее распространенным методом синтеза плоских планетарных зубчатых механизмов с двухвенцовыми сателлитами является метод сомножителей [1]. В сущности этот метод предполагает перебор практически случайных вариантов до тех пор, пока конструктор не натолкнется на наиболее подходящий. Сделать обозримый анализ всех теоретически возможных вариантов решения этот метод не позволяет.

В предлагаемой работе выведены формулы для синтеза плоских планетарных механизмов, позволяющие представить все возможные решения в виде графиков. Анализ таких графиков позволит в дальнейшем искать наиболее оптимальные решения не методом перебора практически случайных вариантов, а наглядным поиском наиболее оптимального. Кроме этого, предлагаемые формулы отличаются большой общностью для всех схем плоских планетарных механизмов, включая механизмы с одновенцовыми сателлитами, которые рассматриваются как частный случай соответствующих механизмов с двухвенцовыми сателлитами.

ВЫВОД ФОРМУЛ

На рис. 1, а-е изображены основные схемы плоских дифференциальных механизмов с двумя степенями свободы. Плоский планетарный механизм с одной степенью свободы получается из соответствующего дифференциального остановкой одного из центральных колес. Для общности последующих рассуждений будем обозначать водило буквой *H*, а зубчатые колеса цифрами:

1 - подвижное центральное колесо;
2 - венец сателлита, входящего в зацепление с подвижным центральным колесом;
2' - венец сателлита, входящего в зацепление с неподвижным центральным колесом;
3 - неподвижное центральное колесо.

Числа зубьев колес будем обозначать в соответствии с их нумерацией через z_1, z_2, $z_{2'}$ и z_3. Механизмы рис.1, д и е будем рассматривать как частный случай соответствующих механизмов рис.1, в и г, когда в последних $z_2 = z_{2'}$. Сателлит в таком механизме будем обозначать цифрой *2'*.

Далее обозначим:

$u_{1H}^{(3)}$ - передаточное отношение в планетарном механизме от колеса 1 к водилу *H* при неподвижном колесе 3;

$u_{13}^{(H)}$ - передаточное отношение от колеса 1 к колесу 3 в предположении, что водило неподвижно, а колеса 1 и 3 подвижны.

Известно [1], что

$$u_{1H}^{(3)} = 1 - u_{13}^{(H)}, \tag{1}$$

где

$$u_{13}^{(H)} = \pm \frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}}. \tag{2}$$

В фомуле (2) знак плюс относится к схемам рис. 1, а и б, а знак минус - к схемам рис.1, в, г, д и е.

Планетарный механизм должен удовлетворять *двум основным условиям. Первое* - он должен обеспечивать заданное передаточное отношение $u_{1H}^{(3)}$. *Второе* - должно быть удовлетворено условие соосности, которое заключается в том, что оси колес 1, 2 и водила *H* располагаются на одной линии *OO*.

Анализ формул (1) и (2) применительно к рассматриваемым механизмам показывает, что механизмами по схемам рис. 1, а и б можно теоретически осуществить передаточные отношения $u_{1H}^{(3)}$ *в двух вариантах. В первом варианте* $0 < u_{1H}^{(3)} < 1$, а *во втором* $u_{1H}^{(3)} < 0$. *Для остальных схем* теоретически возможные передаточные оношения будут: $u_{1H}^{(3)} > 1$ (рис. 1, в и г), $u_{1H}^{(3)} > 2$ (рис.1, д) и $1 < u_{1H}^{(3)} < 2$ (рис.1,е).

Условия соосности будем записывать в виде:

$z_1 = z_3 + z_{2'} - z_2$ (рис. 1,а),

$z_1 = z_3 - z_{2'} + z_2$ (рис. 1,б),

$z_1 = z_3 - z_{2'} - z_2$ (рис. 1,в),

$z_1 = z_3 + z_{2'} + z_2$ (рис. 1,г),

$z_1 = z_3 - 2z_2$ (рис. 1,д),

$z_1 = z_3 + 2z_2$ (рис. 1,е).

Для удобства последующих рассуждений сведем сказанное выше в таблицу (см. столбцы 1, 2 и 3). Выведем вначале формулы для синтеза планетарного механиз-

[1] *Автор - доцент кафедры технологии и оборудования лесного комплекса*

ма рис. 1,а, вариант 1. При заданном $u_{1H}^{(3)}$ из формулы (1) определяем:

$$u_{13}^{(H)} = 1 - u_{1H}^{(3)} \quad (3)$$

Теперь запишем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} u_{13}^{(H)} &= \frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}} \\ z_1 &= z_3 + z_{2'} - z_2 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Первое уравнение системы (4) выражает обеспечение заданного передаточного отношения, а второе выражает условие соосности. Имеется два уравнения и четыре неизвестных (z_1, z_2, $z_{2'}$ и z_3), т. е. имеется бесконечное множество решений. Чтобы сделать все эти решения обозримыми, поступим следующим образом. Обозначим через x число зубьев на колесе 3, если их число на колесе 1 принять за единицу измерения. Тогда система (4) принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} u_{13}^{(H)} &= \frac{z_2}{z_{2'}} x \\ 1 &= x + z_{2'} - z_2 \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему, имеем:

$$z_2 = \frac{u_{13}^{(H)}(1-x)}{x - u_{13}^{(H)}},$$

$$z_{2'} = \frac{(1-x)x}{x - u_{13}^{(H)}}.$$

Теперь можно записать:

$$\begin{aligned} z_1 &= 1, \\ z_2 &= \frac{u_{13}^{(H)}(1-x)}{x - u_{13}^{(H)}}, \\ z_{2'} &= \frac{(1-x)x}{x - u_{13}^{(H)}}, \\ z_3 &= x. \end{aligned} \quad (5)$$

Условие обеспечения заданного передаточного отношения и условие соосности, выраженные соответственно первым первым и вторым уравнениями системы (4), не нарушатся, если число зубьев каждого колеса умножить на один и тот же произвольный множитель. На этом основаниии умножим правые части уравнений (5) на $(x - u_{13}^{(H)})p$, где p - произвольное положительное число. Тогда формулы для определения чисел зубьев колес рассматриваемого механизма (рис. 1,а, вариант 1) принимают вид:

$$\begin{aligned} z_1 &= (x - u_{13}^{(H)})p, \\ z_2 &= u_{13}^{(H)}(1-x)p, \\ z_{2'} &= x(1-x)p, \\ z_3 &= x(x - u_{13}^{(H)})p. \end{aligned} \quad (6)$$

Пределы изменения коэффициента x в этих уравнениях определяются из условия, что z_1, z_2, $z_{2'}$ и z_3 могут быть только положительными числами. Очевидно, что для рассматриваемого случая $u_{13}^{(H)} < x < 1$. Полученные результаты запишем в таблицу (первая строка, столбцы 4, 5, 6, 7 и 8). Для механизмов рис. 1,а (второй вариант) и рис. 1,б (оба варианта), а также для механизмов рис. 1,в и г формулы для синтеза могут быть получены аналогично. Однако их проще получить из формул (6). Для этого поступаем так:

1. Сравниваем теоретически возможные $u_{1H}^{(3)}$ механизма, формулы для которого уже имеются, с $u_{1H}^{(3)}$ механизма, формулы для которого мы желаем получить. Если их знаки различны, то в правых частях исходных формул знаки меняем на обратные. Если же $u_{1H}^{(3)}$ одинакового знака у обоих механизмов, то исходные формулы не меняются.
2. Теперь сравниваем выражения для условий соосности обоих механизмов. Если в этих выражениях перед z, имеющими одинаковые индексы, знаки различны, то в выражениях для этих z, полученных в пункте 1, в правой части меняют знаки на обратные. Полученные таким образом формулы сведены в таблицу.

Что касается схем рис. 1,д и е то, как отмечалось выше, их можно рассматривать как частный случай схем рис. 1,в и г соответственно, когда $z_2 = z_{2'}$. В этом случае $x = -u_{13}^{(H)}$, т. е. имеет фиксированное значение. Подставляя это значение x в формулы для определения чисел зубьев схем рис. 1,в или г, формулам для синтеза механизмов рис. 1,д и е можно придать следующий прстой вид:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2p, \\ z_2 &= \pm(1 - u_{13}^{(H)})p, \\ z_3 &= -2u_{13}^{(H)}p. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь перед правой частью формулы для определения z_2 знак плюс соответствует механизму рис. 1,е, а знак минус - механизму рис. 1,д.

Таблица

Формулы для синтеза плоских планетарных механизмов

$u_{1H}^{(3)}$ задается. $u_{13}^{(H)}$ определяется по формуле $u_{13}^{(H)} = 1 - u_{1H}^{(3)}$.							
Механизм	$u_{1H}^{(3)}$	Условие соосности	z_1	z_2	$z_{2'}$	z_3	x
1	2	3	4	5	6	7	8
Рис.1,а. вар.1	$0 < u_{1H}^{(3)} < 1$	$z_1 = z_3 + z_{2'} - z_2$	$z_1 = (x - u_{13}^{(H)})p$	$z_2 = u_{13}^{H}(1 - x)p$	$z_{2'} = x(1 - x)p$	$z_3 = x(x - u_{13}^{H})p$	$u_{13}^{(H)} < x < 1$
Рис.1,а, вар.2	$u_{1H}^{(3)} < 0$	$z_1 = z_3 + z_{2'} - z_2$	$z_1 = (u_{13}^{(H)} - x)p$	$z_2 = u_{13}^{H}(x - 1)p$	$z_{2'} = x(x - 1)p$	$z_3 = x(u_{13}^{H} - x)p$	$1 < x < u_{13}^{(H)}$
Рис.1,б, вар.1	$0 < u_{1H}^{(3)} < 1$	$z_1 = z_3 - z_{2'} + z_2$	$z_1 = (x - u_{13}^{(H)})p$	$z_2 = u_{13}^{H}(x - 1)p$	$z_{2'} = x(x - 1)p$	$z_3 = x(x - u_{13}^{H})p$	$x > 1$
Рис.1,б, вар.2	$u_{1H}^{(3)} < 0$	$z_1 = z_3 - z_{2'} + z_2$	$z_1 = (u_{13}^{(H)} - x)p$	$z_2 = u_{13}^{H}(1 - x)p$	$z_{2'} = x(1 - x)p$	$z_3 = x(u_{13}^{H} - x)p$	$0 < x < 1$
Рис.1,в	$u_{1H}^{(3)} > 1$	$z_1 = z_3 - z_{2'} - z_2$	$z_1 = (x - u_{13}^{(H)})p$	$z_2 = u_{13}^{H}(1 - x)p$	$z_{2'} = x(x - 1)p$	$z_3 = x(x - u_{13}^{H})p$	$x > 1$
Рис.1,г	$u_{1H}^{(3)} > 1$	$z_1 = z_3 + z_{2'} + z_2$	$z_1 = (x - u_{13}^{(H)})p$	$z_2 = u_{13}^{H}(x - 1)p$	$z_{2'} = x(1 - x)p$	$z_3 = x(x - u_{13}^{H})p$	$0 < x < 1$
Рис.1,д	$u_{1H}^{(3)} > 2$	$z_1 = z_3 - 2z_2$	$z_1 = 2p$	$z_2 = -(1 + u_{13}^{H})p$	–	$z_3 = -2u_{13}^{(H)}p$	–
Рис.1,е	$1 < u_{1H}^{(3)} < 2$	$z_1 = z_3 + 2z_2$	$z_1 = 2p$	$z_2 = (1 + u_{13}^{H})p$	–	$z_3 = -2u_{13}^{(H)}p$	–

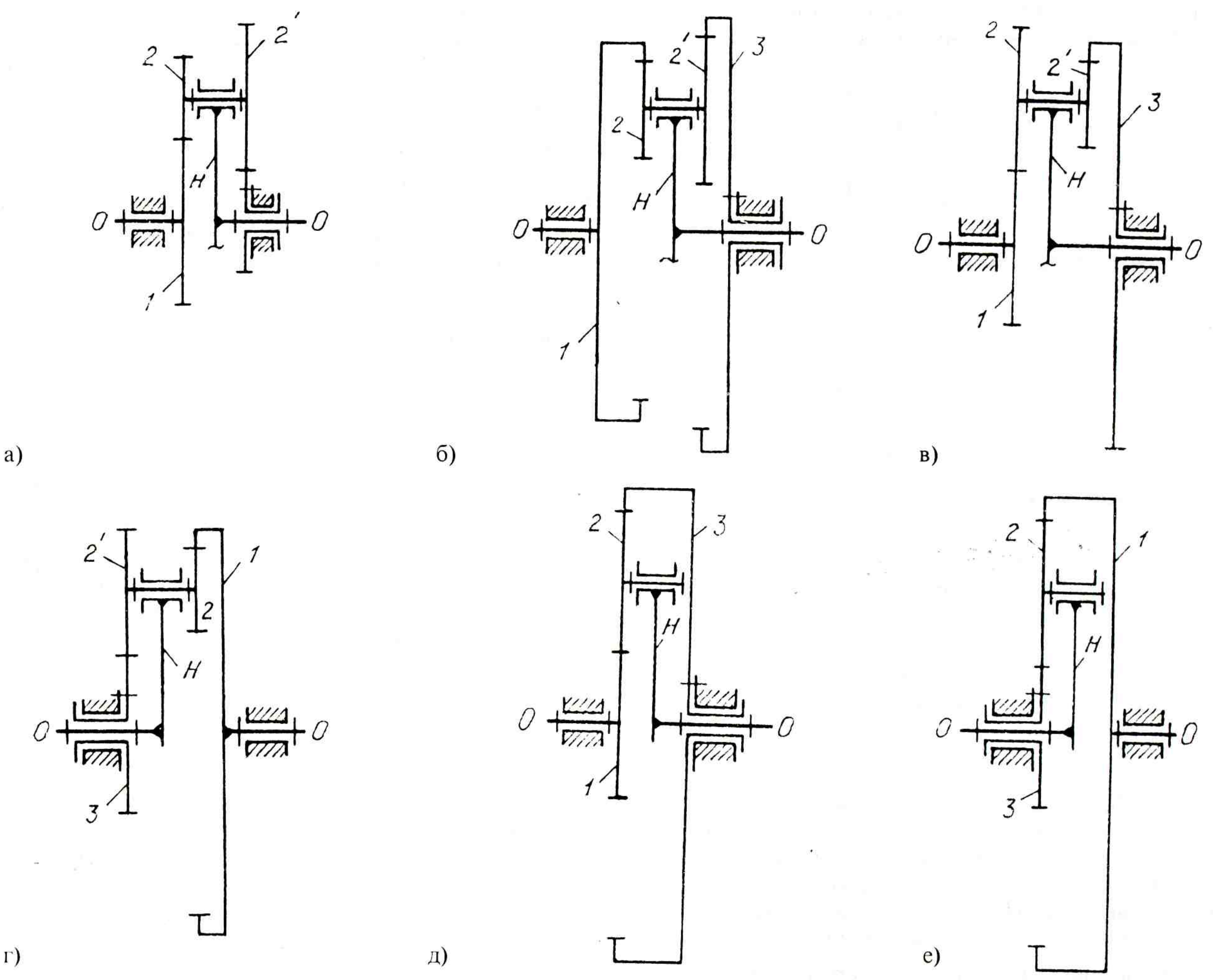

Рис.1. Расчетные схемы механизмов

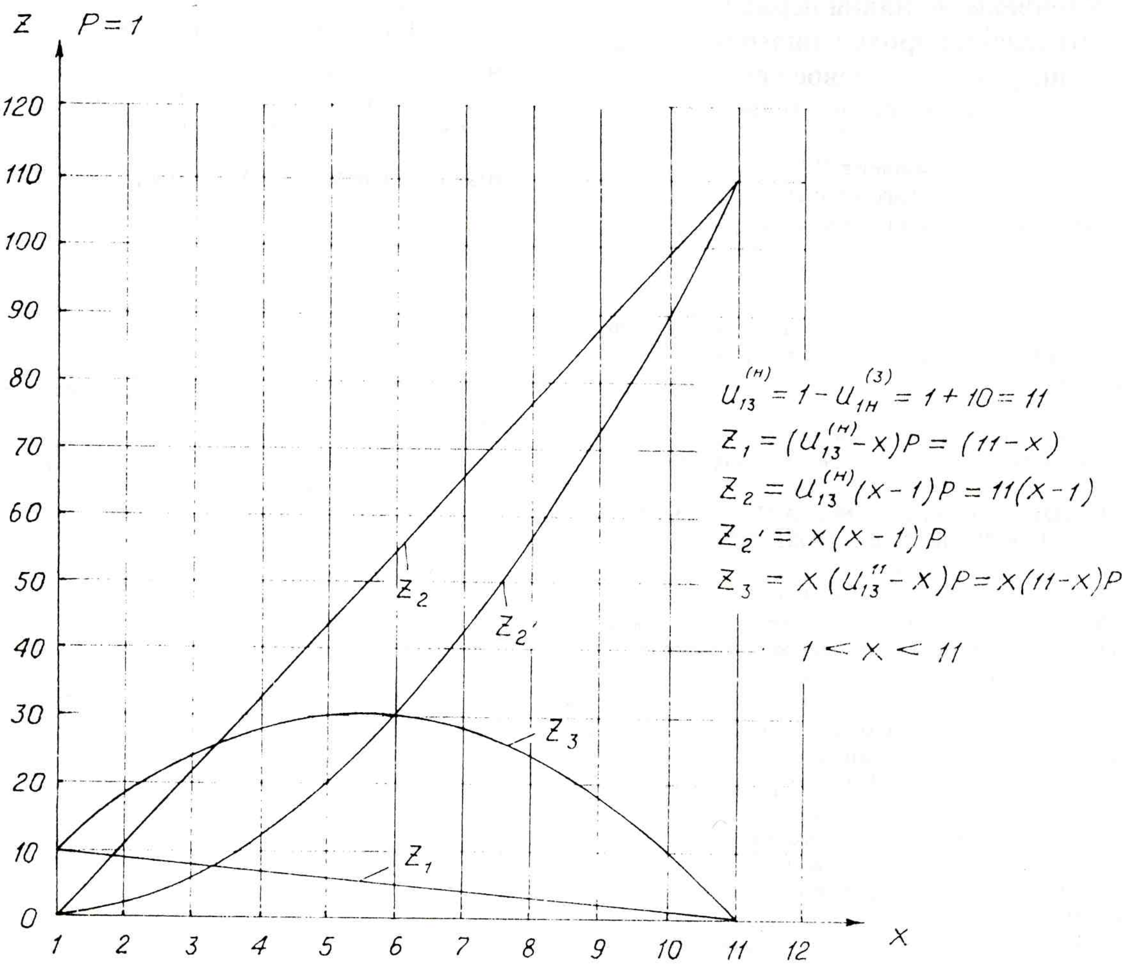

Рис.2. Соотношения чисел зубьев колес механизма, рис.1, при $u_{1H}^{(3)}=-10$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные формулы позволяют искать подходящее решение при проектировании схем механизмов рис. 1,а-г, как методом перебора вариантов, так и более осмысленно и наглядно представив все возможные решения для заданного $u_{1H}^{(3)}$ в виде графиков $z = z(x)$, при $p = 1$. Для примера на рис. 2 представлен график всех теоретически возможных решений для осуществления $u_{1H}^{(3)} = -10$ механизмом по схеме рис.1,а. Анализ таких графиков выходит за пределы настоящей статьи.

Что касается схем рис. 1,д и е, то решение для каждого $u_{1H}^{(3)}$ при $p=1$ здесь однозначно. Размеры механизма определяются только соответствующим подбором p. Это решение на графиках $z = z(x)$ для механизмов рис. 1,в и г соответствует $x = -u_{13}^{(H)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория механизмов и машин: Учеб. для втузов / К.В.Фролов, С.А.Попов, А.К.Мусатов и др.; Под ред. К.В.Фролова. М.:Высш. шк., 1987. 496 с.: ил .