**Труды Петрозаводского государственного университета**
Серия "Математика" Выпуск 8, 2001

УДК 515.12

# ПОНЯТИЕ КЛЕТОЧНОГО ПОДФУНКТОРА КОВАРИАНТНОГО ФУНКТОРА В КАТЕГОРИИ *COMP*

Н. Ю. Светова

В статье вводится понятие клеточного подфунктора. Получены примеры клеточных подфункторов. Доказано, что пространство замкнутых подмножеств клеточно вложимо в $\lambda(X \cup \{p\})$. На основе полученных результатов установлено равенство $c(F(X)) = c(X^\omega)$ для ковариантных функторов $\mathcal{N}^k$, $\lambda$ и $G$ в категории $Comp$.

В статье рассматриваются ковариантные функторы, действующие в категории $Comp$. Напомним некоторые основные определения (см., например, [5]).

Функтор $F$ *сохраняет точку*, если он переводит одноточечное пространство в одноточечное.

Функтор $F$ называется *непрерывным в смысле Щепина*, если

$$F(\lim S) = \lim F(S)$$

для всякого спектра $S$.

Пусть $i_A : A \to X$ — тождественное вложение замкнутого подпространства. Через $F_X(A)$ обозначается образ отображения $F(i_A)$. Функтор $F$ *сохраняет пересечения*, если для любого бикомпакта $X$ и любого семейства $\{A_\alpha\}$ замкнутых подмножеств $X$ имеет место

$$F_X\left(\bigcap_\alpha \{A_\alpha\}\right) = \bigcap_\alpha \{F_X(A_\alpha)\}.$$

Для непрерывного функтора $F$ для сохранения пересечения достаточно выполнение равенства

$$F_X(A_1 \cap A_2) = \{F_X(A_1)\} \cap \{F_X(A_2)\}.$$

Функтор $F$ называется *мономорфным*, если для любого взаимно однозначного отображения $f$ отображение $F(f)$ также взаимно однозначно.

Непрерывный, мономорфный функтор, сохраняющий точку, пустое множество и пересечения, называется *полунормальным.*

Функтор $F$ *сохраняет прообразы*, если для любого отображения $f : X \to Y$ и любого $A \subset Y$

$$(F(f))^{-1} F_Y(A) = F_X(f^{-1}A).$$

Функтор $F$ называется *эпиморфным*, если он сохраняет эпиморфизмы.

Функтор $F$ *сохраняет вес*, если для любого бесконечного $X$

$$w(X) = w(F(X)).$$

Полунормальный функтор называется *почти нормальным*, если он сохраняет прообразы и вес бесконечных бикомпактов. Почти нормальный эпиморфный функтор называется *нормальным.*

Если $F$ — мономорфный функтор, то для любой точки $\xi \in F(X)$ определен *носитель* $supp(\xi)$ следующим образом:

$$supp(\xi) = \cap\{A \subset X : A\, \textit{замкнуто}\, \textit{и}\, \xi \in F_X(A)\}.$$

Приведем определение и свойства функтора $\mathcal{N}^k$ $(k \geq 2)$. Пусть дан бикомпакт $X$. Система $\xi$ замкнутых подмножеств пространства X называется *$k$-сцепленной*, если любые $k$ элементов из $\xi$ пересекаются. $k$-сцепленную систему при $k = 2$ будем называть *сцепленной системой.* Система $\xi$ называется *полной*, если для каждого замкнутого множества $F \subset X$ условие:

$$\text{“любая окрестность } OF \text{ содержит множество } \varPhi \in \xi\text{”}$$

влечет $F \in \xi$.

На множестве $\mathcal{N}^k(X)$ всех полных $k$-сцепленных систем (П$k$СС) определяется топология, открытую базу которой образуют множества вида

$$O(U_1,\dots,U_n)(V_1,\dots,V_m)=\{\xi\in\mathcal{N}^kX\colon\quad \forall i=1,\dots,n\quad \exists F_i\in\xi:\\ F_i\subset U_i\quad \forall\varPhi\in\xi\quad \varPhi\cap V_j\neq\emptyset\quad \forall j=1,\dots,m\},$$

где $U_1,\dots,U_n,V_1,\dots,V_m$ — непустые открытые подмножества $X$. В случае $k=2$ пространство $\mathcal{N}^2(X)$ будем называть пространством полных сцепленных систем (ПСС) и использовать обозначение $\mathcal{N}(X)$. В [2] показано, что пространства $\mathcal{N}^k(X)$ являются бикомпактами.

Пусть $\xi$ — $k$-сцепленная система, $\xi_f$ — пополнение $\xi$, которое определяется следующим образом:

$$\xi_f=\xi\cup\{F:\forall OF\quad \exists\varPhi\in\xi:\varPhi\subset OF\}.$$

Известно, что пополнение $\xi_f$ всякой $k$-сцепленной системы $\xi$ является П$k$СС (см. [2]).

Пусть отображение $f:X\to Y$ непрерывно. Отображение $\mathcal{N}f:\mathcal{N}X\to\mathcal{N}Y$ определяется следующим образом: любой ПСС $\xi\in\mathcal{N}X$ поставим в соответствие пополнение сцепленной системы $f(\xi)=\{fF:F\in\xi\}$ (если $f$ является отображением "на", то сцепленная система $f(\xi)$ будет полной, но в общем случае необходимо взять пополнение). Для любого непрерывного $f:X\to Y$ отображение

$$\mathcal{N}^kf:\mathcal{N}^kX\to\mathcal{N}^kY$$

определяется в [2] как

$$\mathcal{N}^kf=\mathcal{N}f|_{\mathcal{N}^kX.}$$

Функтор $\mathcal{N}^k$ является ковариантным в категории *Comp*. В случае, когда $k=2$, пространство П$k$СС совпадает с ПСС. Так как существует вложение $r:\mathcal{N}^k\to N$, то $\mathcal{N}^k$ является подфунктором функтора $\mathcal{N}$. В дальнейшем будем рассматривать функтор $\mathcal{N}^k$, где $k\geq 2$. Очевидно, что $\mathcal{N}^k$ сохраняет точку и пустое множество.

Легко показать, что функтор $\mathcal{N}^k$ является полунормальным, эпиморфным функтором в категории *Comp*, который сохраняет вес и не сохраняет прообразы.

Пусть $X,Y$ — бикомпакты и $Y\subset X$.

Семейство $u=\{U_\alpha,\alpha\in A\}$ называется *клеточным семейством* в $X$, если каждое $U_\alpha$ является непустым открытым подмножеством $X$ и $U_\alpha\cap U_\beta=\emptyset$ для различных $\alpha$ и $\beta$.

Если для клеточного семейства $u = \{U_\alpha, \alpha \in A\}$ в $Y$ найдется клеточное семейство $\tilde{u} = \{\widetilde{U}_\alpha, \alpha \in A\}$ в $X$ такое, что $\widetilde{U}_\alpha \cap Y = U_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$, то в этом случае назовем семейство $\tilde{u}$ *клеточным продолжением* семейства $u$ в $X$. Если для любого клеточного семейства в $Y$ существует клеточное продолжение в $X$, то пространство $Y$ *клеточно вложено* в $X$.

Поскольку клеточность пространства не монотонна по замкнутым подмножествам (см. [6]), то существуют примеры бикомпактов $Y \subset X$, где $Y$ не клеточно вложено в $X$.

Назовем подфунктор $F$ функтора $G$ *клеточным*, если для любого $X$ пространство $F(X)$ клеточно вложено в $G(X)$.

Лемма 1. *Пусть семейство $\sigma = \{U_\alpha, \alpha \in A\}$ — база пространства $F(X)$ и для каждого $U_\alpha$ определено открытое продолжение $\widetilde{U}_\alpha$ в $G(X)$. Если из условия: любые два множества из $u$ не пересекаются — следует, что продолжения этих множеств тоже не пересекаются, то пространство $F(X)$ клеточно вложено в $G(X)$.*

Доказательство. Пусть $\{W_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ — произвольное клеточное семейство множеств в $F(X)$. Множество $W_\gamma$ для любого $\gamma \in \Gamma$ представимо в виде $W_\gamma = \cup U_\alpha^\gamma$, где $U_\alpha^\gamma \in \sigma$. Для каждого $W_\gamma$ определим открытое продолжение $\widetilde{W}_\gamma = \cup \widetilde{U}_\alpha^\gamma$. Легко видеть, что семейство $\{\widetilde{W}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ клеточное и, по определению, $F(X)$ клеточно вложено в $G(X)$. $\square$

Теорема 1. *Функтор* exp *является клеточным подфунктором функтора $\mathcal{N}^k$.*

Доказательство. Для всякого бикомпакта $X$ определено вложение $f_X : \exp(X) \to \mathcal{N}^k(X)$ по формуле $f_X(F) = \{F\}_f$. Если задано непрерывное отображение $g : X \to Y$, то $f_Y \circ \exp(g) = \mathcal{N}^k(g) \circ f_X$ и exp — подфунктор функтора $\mathcal{N}^k$.

Открытую базу в $\exp(X)$ образуют множества

$$O(V_1, \ldots, V_n) = \{F \in \exp(X) : F \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i \text{ и } F \cap V_i \neq \emptyset \quad \forall i = 1, \ldots, n\}.$$

Пусть $u = \{U_\alpha, \alpha \in A\}$ — базисное семейство в пространстве $\exp(X)$, для каждого $\alpha \in A$

$$U_\alpha = O(V_1, \ldots, V_n).$$

Рассмотрим семейство открытых множеств $\tilde{u} = \{\widetilde{U}_\alpha, \alpha \in A\}$, где $\widetilde{U}_\alpha$ возьмем из базы пространства $\mathcal{N}^k(X)$:

$$\widetilde{U}_\alpha = O\left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right)(V_1, \ldots, V_n).$$

Покажем, что для каждого $\alpha \in A$ множество $\widetilde{U}_\alpha$ является продолжением $U_\alpha$ в $\mathcal{N}^k(X)$:

$$\widetilde{U}_\alpha \cap \exp(X) = \{\xi \in N^k X : \quad \exists F \in \xi : \quad F \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i, \quad \forall \varPhi \in \xi \quad \varPhi \cap V_i \neq \emptyset$$

$$\forall i = 1, \ldots, n\} \cap \{\{F\}_f : F \in \exp(X)\} = \{F \in \exp(X) : \quad F \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i,$$

$$F \cap V_i \neq \emptyset \quad \forall i = 1, \ldots, n\} \stackrel{def}{=} U_\alpha.$$

Здесь пространство $\exp(X)$ отождествляем с его образом в $\mathcal{N}^k(X)$ при отображении $f_X$.

Пусть $U_1 = O(V_1, \ldots V_n)$, $U_2 = O(W_1, \ldots W_m)$ и $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Предложение 1. *Если $O(V_1, \ldots, V_n) \cap O(W_1, \ldots W_m) = \emptyset$, тогда либо найдется индекс $i_0$, для которого выполнено*

$$V_{i_0} \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} W_j\right) = \emptyset, \tag{1}$$

*либо найдется индекс $j_0$ такой, что*

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right) \cap W_{j_0} = \emptyset. \tag{2}$$

Доказательство. Предположим обратное. Допустим, что для каждого $i$

$$V_i \cap \left(\bigcup_{j=1}^{m} W_j\right) \neq \emptyset$$

и для каждого $j$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right) \cap W_j \neq \emptyset.$$

Построим множество $F$ следующим образом: для любого $i = 1, \ldots, n$ найдется точка
$$x_i \in V_i \cap \left( \bigcup_{j=1}^{m} W_j \right)$$
и для любого $j = 1, \ldots, m$ найдется точка
$$y_j \in \left( \bigcup_{i=1}^{n} V_i \right) \cap W_j.$$
Положим
$$F = \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\}.$$
Легко видеть, что $F$ является замкнутым непустым множеством; причем $F \subset \cup V_i$ и $\forall i = 1, \ldots, n$ $F \cap V_i \neq \emptyset$, в то же время $F \subset \cup W_j$ и $\forall j = 1, \ldots, m$ $F \cap W_j \neq \emptyset$. Тогда $F$ одновременно находится и в $U_\alpha$ и в $U_\beta$, что исходя из клеточности семейства $u$ в $\exp(X)$ недопустимо. Тем самым мы доказали предположение о существовании индекса $i_0$ или индекса $j_0$ с условиями (1) и (2) соответственно. □

Продолжим доказательство теоремы.

Проверим, будут ли дискретными продолжения множеств $U_1$ и $U_2$. Допустим, что $\widetilde{U}_1 \cap \widetilde{U}_2 \neq \emptyset$, т. е. найдется такая П$k$СС $\xi_0$, которая одновременно из $\widetilde{U}_1$ и из $\widetilde{U}_2$.

В предложении 1 было показано, что обязательно найдется, по крайней мере, одно множество $V_{i_0}$, удовлетворяющее (1), или множество $W_{j_0}$, удовлетворяющее (2). По определению системы $\xi_0$ существует замкнутое множество $F' \in \xi_0$:
$$F' \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i \quad u \quad \forall j = 1, \ldots, m \quad F' \cap W_j \neq \emptyset$$
и существует замкнутое множество $F'' \in \xi_0$:
$$F'' \subset \bigcup_{j=1}^{m} W_j \quad u \quad \forall i = 1, \ldots, n \quad F'' \cap V_i \neq \emptyset.$$
Тогда
$$\emptyset = V_{i_0} \cap \left( \bigcup_{j=1}^{m} W_j \right) \supset V_{i_0} \cap F'' \neq \emptyset$$

или

$$\emptyset = \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right) \cap W_{j_0} \supset F' \cap W_{j_0} \neq \emptyset.$$

Получили противоречие. Следовательно, такой П$k$СС $\xi_0$ не существует и $\widetilde{U}_1 \cap \widetilde{U}_2 = \emptyset$. Из леммы вытекает, что $\exp(X)$ клеточно вложено в $\mathcal{N}^k(X)$. Поскольку последнее утверждение справедливо для любого бикомпакта $X$, то exp — клеточный подфунктор функтора $\mathcal{N}^k$. $\square$

Следствие 1. $c(\mathcal{N}^k(X)) = c(X^\omega)$.

Доказательство. Поскольку $\mathcal{N}^k$ полунормальный эпиморфный функтор, сохраняющий вес, то из [6] вытекает

$$c(\mathcal{N}^k(X)) \leq c(X^\omega). \tag{3}$$

Из теоремы 1 следует клеточная вложимость пространства $\exp(X)$ в $\mathcal{N}^k(X)$, поэтому

$$c(\mathcal{N}^k(X)) \geq c(\exp(X)) = c(X^\omega). \tag{4}$$

Учитывая (3) и (4), получим

$$c(\mathcal{N}^k(X)) = c(X^\omega).\square$$

При $k = 2$ из следствия 1 непосредственно вытекает

Следствие 2. $c(\mathcal{N}(X)) = c(X^\omega)$.

Рассмотрим пространство замкнутых гиперпространств включения [3]. Напомним, что семейство замкнутых множеств $\xi$ называется *гиперпространством включения*, если условие $F \supset M \in \xi$ влечет $F \in \xi$. На множестве $G(X)$ замкнутых в $\exp(X)$ гиперпространств включения определяется топология, порожденная базой, состоящей из множеств вида

$$O(U_1, \ldots, U_n)(V_1, \ldots, V_m) = \{\xi \in G(X) : \forall i = 1, \ldots, n$$
$$\exists F_i \in \xi : F_i \subset U_i \quad и \quad \forall j = 1, \ldots, m, \quad \forall \Phi \in \xi \quad \Phi \cap V_j \neq \emptyset\},$$

где $U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_m$ — непустые открытые подмножества бикомпакта $X$.

Пусть теперь $f : X \to Y$ — непрерывное отображение. Для всякого гиперпространства включения $\xi \in G(X)$ ставится в соответствие пополнение системы $f(\xi) = f(F : F \in \xi)$, которое, очевидно, является гиперпространством включения в $G(Y)$. Возникает отображение $Gf : G(X) \to G(Y)$, которое непрерывно, так как

$$G^{-1}O(U_1, \ldots, U_n)(V_1, \ldots, V_m) = \\ = O(f^{-1}U_1, \ldots, f^{-1}U_n)(f^{-1}V_1, \ldots, f^{-1}V_m).$$

Таким образом, строится ковариантный функтор $G$ в категории $Comp$. Не представляет труда показать, что $G$ — полунормальный, эпиморфный функтор, сохраняющий вес.

Функтор exp является подфунктором функтора гиперпространств включения $G$ в силу существования естественного преобразования $\Phi = \{f_X : \exp(X) \to G(X)\}$, где для любого бикомпакта $X$ отображение $f_X$ является вложением и определяется следующим образом: каждому замкнутому $F$ из $X$ ставится в соответствие гиперпространство включения

$$\xi_F = \{\Phi \in \exp(X) : F \subset \Phi\}.$$

Доказательство того, что exp есть клеточный подфунктор функтора $G$, почти дословно повторяет доказательство теоремы 1, только вместо открытого продолжения базисного семейства $u = \{U_\alpha, \alpha \in A\}$ из пространства замкнутых множеств $\exp(X)$ следует положить семейство $\tilde{u}$, образованное открытыми множествами:

$$\widetilde{U}_\alpha = O\left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right)(V_1, \ldots V_n),$$

взятыми из базы пространства $G(X)$.

Как следствие доказанного утверждения получим равенство

$$c(G(X)) = c(X^\omega).$$

*Суперрасширением пространства* $X$ называется множество $\lambda(X)$ максимальных сцепленных систем (МСС) замкнутых подмножеств пространства $X$ с топологией, открытую базу которой образуют множества вида:

$$O(U_1, \ldots, U_n) = \{\xi \in \lambda(X) : \forall i = 1, \ldots, n \quad \exists F_i \in \xi : F_i \subset U_i\}.$$

Операция $\lambda$ является ковариантным функтором в категории $Comp$ (см. [5]). Функтор максимальных сцепленных систем $\lambda$ является клеточным подфунктором $\mathcal{N}$. Действительно, $\lambda(X)$ вложимо в $\mathcal{N}(X)$

для каждого бикомпакта $X$. Если в качестве канонического продолжения клеточного семейства $u = \{U_\alpha, \alpha \in A\}$ из $\lambda(X)$, где $U_\alpha = O(V_1, \ldots V_n)$, взять семейство $\tilde{u} = \{\widetilde{U}_\alpha, \alpha \in A\}$, состоящее из множеств $\widetilde{U}_\alpha = O(V_1, \ldots V_n)(X)$, выбранных из базы пространства $\mathcal{N}(X)$, то нетрудно показать, что $\tilde{u}$ есть клеточное открытое продолжение $u$.

Рассмотрим теперь пространство $X \cup \{p\}$, где $\{p\} \notin X$. Определим отображение $i : \exp(X) \to \lambda(X \cup \{p\})$ так: каждому замкнутому множеству $F \subset X$ поставим в соответствие пополнение системы

$$\xi_F = \{F\} \cup \{\{p, z\} : z \in F\}.$$

Предложение 2. *Система $(\xi_F)_f$ является МСС.*

Доказательство. Очевидно, система $(\xi_F)_f$ — сцепленная. Покажем максимальность сцепленной системы. Пусть дано замкнутое множество $W$ из $X \cup \{p\}$ и выполнено условие: множество $W$ пересекается с каждым множеством из $(\xi_F)_f$. Проверим, что $W \in (\xi_F)_f$. Поскольку $W$ пересекается с каждым множеством из пополнения $\xi_F$, то оно пересекается и с каждым множеством из самой системы $\xi_F$. Тогда возможны два случая:

1) $p \in W$ и существует точка $z_0 \in W \cap F \neq \emptyset$. Таким образом, $\{p, z_0\} \subset W$, но $\{p, z_0\} \subset \xi_F$. Следовательно, $W \in (\xi_F)_f$;

2) $p \notin W$, тогда для каждого $z \in F$ точка $z \in W$. Значит, $F \subset W$ и получаем, что $W \in (\xi_F)_f$. В силу предложения 4.8 из [5] система $(\xi_F)_f$ — МСС. □

Предложение 3. *Отображение $i$ является вложением.*

Доказательство. Достаточно доказать непрерывность и взаимную однозначность отображения $i$.

Непрерывность. Пусть $V_1, \ldots, V_n$ — открытые множества в $X \cup \{p\}$ и $O(V_1, \ldots, V_n)$ — открытое базисное множество в $\lambda(X \cup \{p\})$, и пусть $p \in V_1, \ldots, V_k$, $p \notin V_{k+1}, \ldots, V_n$. Положим $U = V_{k+1} \cap \ldots \cap V_n$, в случае $k = n$ положим $U = X$. Введем обозначение $V_i{}' = V_i \cap U$. Прообраз

$$i^{-1}O(V_1, \ldots, V_n) = i^{-1}(\{(\xi_F)_f \in \lambda(X \cup \{p\}) : \quad \forall i = 1, \ldots, n$$
$$\exists \Phi_i \in (\xi_F)_f : \quad \Phi_i \subset V_i, \quad F \subset X\}) = \{F \in \exp(X) : \quad \forall i = 1, \ldots, k$$
$$F \cap V_i{}' \neq \emptyset, \quad F \subset U\} = O(V_1', \ldots, V_k', U)$$

является открытым базисным множеством в $\exp(X)$.

Взаимная однозначность. Пусть $F_1, F_2 \in \exp(X)$ и $i(F_1) = i(F_2)$. По определению отображения $i$: $i(F_1) = (\xi_{F_1})_f$, $i(F_2) = (\xi_{F_2})_f$. Если $i(F_1) = i(F_2)$, то $\xi_{F_1} = \xi_{F_2}$. А это возможно лишь в случае, когда $F_1 = F_2$. $\square$

Теорема 2. *Пространство* $\exp(X)$ *клеточно вложено в* $\lambda(X \cup \{p\})$.

Доказательство. Пусть дано базисное семейство $u = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ в $\exp(X)$, где $U_\alpha = O(V_1, \ldots, V_n)$ для любого $\alpha$ из $A$.

Определим $\tilde{u} = \{\widetilde{U}_\alpha, \alpha \in A\}$ — семейство открытых множеств в $\lambda(X \cup \{p\})$: в качестве $\widetilde{U}_\alpha$ возьмем множества

$$\widetilde{U}_\alpha = O(\bigcup_{i=1}^{n} V_i, V_1 \cup \{p\}, \ldots, V_n \cup \{p\})$$

из базы $\lambda(X \cup \{p\})$, $V_1, \ldots, V_n$ открыты в $X$ и определены выше. Легко видеть, что $\widetilde{U}_\alpha$ является открытым продолжением $U_\alpha$ для любого $\alpha \in A$.

Пусть два множества из $u$ не пересекаются: $U_1 = O(V_1, \ldots V_n)$, $U_2 = O(W_1, \ldots W_m)$ и $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Докажем, что не пересекаются продолжения $U_1$ и $U_2$. Допустим обратное. Тогда найдется МСС $\xi_0$, для которой выполнены условия $\xi_0 \in \widetilde{U}_1$ и $\xi_0 \in \widetilde{U}_2$. В этом случае

$$\exists F' \in \xi_0 :\ F' \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i \, u \, \forall i = 1, \ldots, n \ \exists F_i \in \xi_0 :\ F_i \subset V_i \cup \{p\}$$

и

$$\exists F'' \in \xi_0 :\ F'' \subset \bigcup_{j=1}^{m} W_j \, u \, \forall j = 1, \ldots, m \ \exists \varPhi_j \in \xi_0 :\ \varPhi_j \subset W_j \cup \{p\}.$$

Из предложения 1 следует, что если существует $i_0$:

$$V_{i_0} \cap \left( \bigcup_{j=1}^{n} W_j \right) = \emptyset,$$

то

$$\emptyset = V_{i_0} \cap \left( \bigcup_{j=1}^{n} W_j \right) \supset F_{i_0} \cap F'',$$

что противоречит сцепленности системы $\xi_0$. Аналогично получим противоречие и в случае, когда существует индекс $j_0$:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i\right) \cap W_{j_0} = \emptyset.$$

Следовательно, такой МСС $\xi_0$ не существует и $\widetilde{U}_1 \cup \widetilde{U}_2 = \emptyset$. Из леммы вытекает, что пространство $\exp(X)$ клеточно вложено в $\lambda(X \cup \{p\})$. □

Теорема 3. *Для функтора $\lambda$ имеет место равенство*

$$c(\lambda(X)) = c(X^\omega). \tag{5}$$

Доказательство. Так как функтор $\lambda$ является полунормальным, эпиморфным, сохраняющим вес функтором [5], то в силу теоремы 5.4 [6] и теоремы 2 получим

$$c(X^\omega) = c(\exp(X)) \le c(\lambda(X \cup \{p\})) \le c((X \cup \{p\})^\omega).$$

Из предложения 2.15 [6] следует

$$c((X \cup \{p\})^\omega) \le \sup c((X \cup \{p\})^n).$$

Оценим $\sup c((X \cup \{p\})^n)$ для любого конечного числа $n$. Поскольку пространство $(X \cup \{p\})^n$ является прямой суммой пространств, гомеоморфных пространствам $X^n, X^{n-1}, \ldots, \{p\}$, то

$$c((X \cup \{p\})^n) = \sup(c(X^n), c(X^{n-1}), \ldots, c(\{p\})) = c(X^n)^1.$$

Таким образом, для каждого конечного $n$ получили

$$c((X \cup \{p\})^n) = c(X^n).$$

Тогда

$$c(X^\omega) \le c((X \cup \{p\})^\omega) \le \sup(c(X \cup \{p\})^n) = \sup c(X^n) = c(X^\omega).$$

Следовательно,

$$c((X \cup \{p\})^\omega) = c(X^\omega).$$

[1] См. предл. 2.3 [6]

Очевидно, что $\lambda(X) \subset \lambda(X \cup \{p\})$ и поскольку $\lambda(X)$ клеточно вложено в $\lambda(X \cup \{p\})$, то

$$c(\lambda(X)) = c(\lambda(X \cup \{p\})) = c(X^\omega). \quad \square$$

В [6] равенство (5) доказано как отдельная теорема. У нас это — следствие теоремы 5.4 [6] для нормальных функторов и клеточного вложения пространства $\exp(X)$ в $\lambda(X \cup \{p\})$.

## Résumé

It has introduced the concept of cellular subfunctor in the category $COMP$ of all compact spaces and their mappings. We has proved that the space of all nonempty closed subsets of $X$ is cellular embed to the $\lambda(X \cup \{p\})$. One of the general results proved in this article is the equality $c(F(X)) = c(X^\omega)$ for covariant functors $\mathcal{N}^k$, $\lambda$ и $G$.

## Библиографический список

[1] Александров П. С. *Введение в теорию множеств и общую топологию.* М.: Наука, 1977.

[2] Иванов А. В. *О пространстве полных сцепленных систем* // Сибирский математический журнал. 1986. Т. 27. № 6. С. 95–110.

[3] Моисеев Е. В. *Суперрасширения нормальных пространств*// Вестник МГУ. Сер.1. Математика, Механика. 1990. № 2. С. 80–82.

[4] Талаат М. *О кардинальных инвариантах пространств сцепленных систем* //Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, Механика. 1995. № 4. С. 14–19.

[5] Федорчук В.В., Филиппов В.В. *Общая топология. Основные конструкции.* М.: Изд-во МГУ, 1988.

[6] Fedorchuk V., Todorcevic S. *Cellularity of covariant functors* // Topology and its applications. 76 (1997). P. 125–150.

Петрозаводский государственный университет,
математический факультет,
185910, Петрозаводск, пр. Ленина, 33