Труды Петрозаводского государственного университета
Серия "Математика" Выпуск 3, 1996

УДК 515

ОТНОСИТЕЛЬНО КОМПАКТНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

А. В. Иванов

Хаусдорфово пространство X, содержащее пространство Y в качестве всюду плотного подмножества, называется OK-расширением Y, если Y относительно компактно в X, по определению А. В. Архангельского. В работе установлена связь между OK-расширениями и H-замкнутыми расширениями. Дано описание всех полурегулярных OK-расширений вполне регулярного пространства Y как θ-совершенных неприводимых образов стоун-чеховского расширения βY.

В работе [1] введен и рассмотрен ряд относительных топологических свойств. В их числе — компактность подпространства в объемлющем пространстве. Подпространство Y называется компактным в X, если из любого открытого покрытия пространства X можно выделить конечное подсемейство, объединение элементов которого содержит Y. В [1] показано, что компактность Y в X равносильна компактности Y в его замыкании. Таким образом, при изучении свойства относительной компактности можно ограничиться случаем, когда Y всюду плотно в X. В такой ситуации мы называем пространство X *относительной компактификацией* Y, или OK-*расширением* пространства Y. Целью настоящей работы является описание всех OK-расширений вполне регулярного пространства Y. Все рассматриваемые в дальнейшем пространства предполагаются хаусдорфовыми.

Подпространство Y называется *сильно регулярным в* X (см. [1]), если для каждой точки $x \in X$ и каждого не содержащего ее замкнутого в X множества F найдутся непересекающиеся открытые в X

множества U и V такие, что $x \in U$ и $F \cap Y \subset V$. В [1] показано, что если Y компактно в хаусдорфовом пространстве X, то Y сильно регулярно в X.

Предложение 1. *Если Y всюду плотно в X, то Y сильно регулярно в X тогда и только тогда, когда для любой точки $x \in X$ подпространство $Y \cup \{x\}$ регулярно.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Проверим достаточность. Пусть $x \in X$, множество F замкнуто в X и $x \notin F$. Рассмотрим в регулярном пространстве $Y \cup \{x\}$ точку x и замкнутое множество $F \cap Y$. Пусть U и V — их непересекающиеся окрестности в $Y \cup \{x\}$ и U', V' — такие открытые в X множества, что

$$U' \cap (Y \cup \{x\}) = U, \quad V' \cap (Y \cup \{x\}) = V.$$

Тогда U' и V' — искомые дизъюнктные окрестности точки x и множества $F \cap Y$ в X, поскольку $U' \cap V' \cap Y = \emptyset$ и Y всюду плотно в X.

Следующее предложение устанавливает связь между OK-расширениями и H-замкнутыми расширениями.

Предложение 2. *Пространство X является OK-расширением Y тогда и только тогда, когда X H-замкнуто и Y сильно регулярно в X.*

Доказательство. Пусть X — OK-расширение Y, и пусть γ — произвольное открытое покрытие X. Тогда существует конечная подсистема $U_1, \ldots, U_k \in \gamma$ такая, что

$$Y \subset \bigcup U_i.$$

Имеем

$$X = [Y] \subset \left[\bigcup U_i\right] = \bigcup [U_i],$$

что означает H-замкнутость X.

Обратно, пусть X H-замкнуто, а Y сильно регулярно в X, и пусть γ — открытое покрытие X. Возьмем произвольную точку $x \in X$. Существует элемент U покрытия γ такой, что $x \in U$. В силу сильной регулярности Y в X найдутся непересекающиеся открытые множества V_x и W в X такие, что $V_x \ni x$ и $W \supset Y \setminus U$. Имеем $[V_x]_X \cap Y \subset U$.

Итак, для любой точки $x \in X$ можно построить окрестность V_x и X такую, что пересечение $[V_x]_X \cap Y$ содержится в некотором элементе покрытия γ. Рассмотрим открытое покрытие $\{V_x : x \in X\}$ пространства X. В силу H-замкнутости X существует конечная подсистема $V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}$, замыкания элементов которой покрывают X. Имеем

$$Y = Y \cap \bigcup [V_{x_i}] = \bigcup ([V_{x_i}] \cap Y) \subset \bigcup U_i,$$

где U_i — элементы покрытия γ, содержащие множества V_{x_i}. Итак, Y компактно в X. Предложение доказано.

Пусть X — OK-расширение Y и t — топология на X. Обозначим через t_σ ассоциированную с t полурегулярную топологию на X.

Предложение 3. *Пространство (X, t_σ) является OK-расширением Y.*

Доказательство. Поскольку Y сильно регулярно в (X, t), для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности U существует окрестность $V \ni x$ такая, что $[V]_X \cap Y \subset U$ (см. доказательство предложения 2). Следовательно, для любой точки $y \in Y$ и любой ее окрестности $U \in t$ существует канонически открытая окрестность $\langle [V] \rangle \in t_\sigma$ такая, что $\langle [V] \rangle \cap Y \subset U$.Значит, ограничения топологий t и t_σ на Y совпадают: $t_\sigma|_Y = t|_Y$, т. е. (X, t_σ) является расширением Y. Поскольку топологии t и t_σ связаны неравенством $t \geq t_\sigma$, Y компактно в (X, t_σ). Предложение доказано.

Полурегулярное H-замкнутое расширение (X, t_σ) является H-замкнутым расширением типа σ, θ-гомеоморфным расширению (X, t) (см. [2]).

Рассмотрим теперь на X топологию t_{tau}, открытую базу которой образуют множества вида $\{x\} \cup (U \cap Y)$, где $x \in X$, а U — окрестность точки x в X в топологии t. Очевидно, что Y — всюду плотное подпространство (X, t_τ), причем для любой точки $x \in X$ $\quad t|_{Y \cup \{x\}} = t_\tau|_{Y \cup \{x\}}$. Следовательно, Y сильно регулярно в (X, t_τ). Расширение (X, t_τ) является H-замкнутым расширением катетовского типа пространства Y (см. [2]).

Итак, для любого OK-расширения (X, t) пространства Y построены два OK-расширения (X, t_σ) и (X, t_τ), причем топологии t, t_σ и t_{tau} связаны неравенствами $t_\tau \geq t \geq t_\sigma$. Покажем, что для любой топологии t' на X , удовлетворяющей неравенствам $t_\tau \geq t' \geq t_\sigma$, пространство (X, t') является OK-расширением Y. В самом деле,

$$t|_Y = t_\tau|_Y \geq t'|_Y \geq t_\sigma|_Y = t|_Y,$$

следовательно, Y является подпространством (X, t'). Если γ — произвольное открытое покрытие X в топологии t', то γ является открытым покрытием и в топологии t_τ, следовательно, из γ можно выделить конечную подсистему, покрывающую Y. Значит, Y компактно в (X, t').

Доказанное утверждение дает следующий способ построения небикомпактных OK-расширений вполне регулярного пространства Y. Пусть bY — некоторое бикомпактное расширение Y, и пусть t — топология на bY. Поскольку bY регулярно, $t = t_\sigma$. Однако если нарост bY бесконечен, то $t_\tau \neq t$ и, следовательно, пространство (bY, t_τ) является небикомпактным OK-расширением Y. То же самое можно сказать и о других топологиях t' на bY, удовлетворяющих неравенствам $t_\tau > t' > t$. Отметим, что все примеры хаусдорфовых небикомпактных OK-расширений, построенные в [1], укладываются в указанную схему. В связи с этим представляет интерес следующий пример.

Пример. Существует полурегулярное небикомпактное OK-расширение (X, t) вполне регулярного пространства Y (для этого расширения имеют место равенства $t = t_\sigma$, однако топология t не является бикомпактной).

Пусть Y — следующее подмножество плоскости с обычной топологией:

$$Y = \{(x, y) : 0 < x \leq 1, 0 < |y| \leq 1\},$$

и пусть

$$X = \{(x, y) : 0 < x \leq 1, |y| \leq 1\} \cup \{a, b\}.$$

Окрестности точек a и b определим так:

$$Oa = \{a\} \cup \{(x, y) : 0 < x < \varepsilon, 0 < y \leq 1\},$$
$$Ob = \{b\} \cup \{(x, y) : 0 < x < \varepsilon, -1 \leq y < 0\},$$

где $\varepsilon > 0$. В остальных точках X зададим обычную топологию плоскости. Очевидно, что X является хаусдорфовым полурегулярным расширением Y, причем X не является бикомпактом.

Покажем, что Y компактно в X. Пусть γ — открытое покрытие X, и пусть U_a и U_b — элементы γ, содержащие точки a и b соответственно. Тогда множество

$$[Y \setminus (U_a \cup U_b)]_X$$

является бикомпактным подмножеством X, следовательно, из покрытия γ можно выделить конечную подсистему $U_1, \ldots, U_n$, покрывающую $Y \setminus (U_a \cup U_b)$. Но тогда $U_a, U_b, U_1, \ldots, U_n$ — конечное покрытие Y. Значит, X является OK-расширением Y.

Итак, выше мы показали, что для описания всех OK-расширений пространства Y достаточно найти все полурегулярные OK-расширения.(Остальные OK-расширения получаются по следующей схеме: берем полурегулярное OK-расширение (X, t), задаем на X произвольную топологию t', удовлетворяющую неравенствам $t_\tau \geq t' \geq t = t_\sigma$, и получаем OK-расширение (X, t')).

Пусть теперь Y — вполне регулярное пространство, которое содержится в X и всюду плотно в нем. Будем говорить, что Y *s-вполне регулярно в X*, если для любой точки $x \in X$ пространство $Y \cup \{x\}$ вполне регулярно[1].

Следующие ниже теоремы дают способ построения всех полурегулярных OK-расширений пространства Y, в которых Y s-вполне регулярно.

Теорема 1. *Пусть X — OK-расширение пространства Y, и пусть Y s-вполне регулярно в X. Тогда существует θ-совершенное неприводимое отображение $f : \beta Y \to X$ расширения Чеха — Стоуна βY на X, которое тождественно на Y.*

Доказательство. Известно (см., например, [2]), что расширение Чеха — Стоуна может быть построено как пространство вполне регулярных концов пространства Y[2].

Пусть x — точка из X. Поскольку Y s-вполне регулярно в X, пространство $Y \cup \{x\}$ вполне регулярно и, следовательно, система

$$\xi_x = \{Ox \cap Y : Ox \text{ — окрестность точки } x \text{ в } X\}$$

[1] В силу предложения 1 s-вполне регулярность Y в X можно было бы назвать сильной вполне регулярностью, однако этот термин уже использован в [1] для обозначения другого понятия.

[2] Вполне регулярный конец — это максимальная центрированная система ξ открытых множеств Y, удовлетворяющая следующему условию вполне регулярности: для любого $U \in \xi$ существует $V \in \xi$ такое, что $[V]$ и $Y \setminus U$ функционально отделимы. На множестве βY вполне регулярных концов Y задается топология, открытую базу которой образуют множества вида $O_U = \{\xi : U \in \xi\}$, где U открыто в Y. Пространство вполне регулярных концов гомеоморфно расширению Чеха - Стоуна пространства Y. Точки $y \in Y$ при этом отождествляются с вполне регулярными концами их окрестностей.

является центрированной вполне регулярной системой в Y. Заметим, что если x и y — две различные точки из X, то системы ξ_x и ξ_y имеют непересекающиеся элементы.

Определим отображение $f : \beta Y \to X$ следующим образом: положим $f(\eta) = x$, если $\xi_x \subset \eta$. Поскольку вполне регулярный конец η не может содержать одновременно системы ξ_x и ξ_y для различных точек $x, y \in X$, отображение f определено однозначно. Всякая вполне регулярная система может быть дополнена до вполне регулярного конца, так что f есть отображение на X.

Покажем, что f определено на всем βY. Пусть $\eta \in \beta Y$. Поскольку пространство X H-замкнуто, множество

$$A = \bigcap_{U \in \eta} [U]_X$$

непусто (см. [4]). Пусть x — некоторая точка из A. Легко видеть, что система $\xi_x \cup \eta$ является центрированной вполне регулярной системой. Следовательно, $\xi_x \subset \eta$ и, значит, $f(\eta) = x$.

Отображение f тождественно на Y. В самом деле, если η — вполне регулярный конец окрестностей точки $y \in Y$ (т. е. $\eta = y$ в βY), то, по определению отображения f, $f(\eta) = y$.

Отображение f θ-непрерывно. Пусть $f(\eta) = x$ и Ox — произвольная окрестность точки x в X. Положим $U = Ox \cap Y$. Имеем $U \in \eta$, следовательно, O_U — окрестность η в βY. Покажем, что $f[O_U] \subset [Ox]$. Пусть $\gamma \in \beta Y$ и $f(\gamma) = y \notin [Ox]$. Тогда существует окрестность Oy точки y такая, что $Oy \cap Ox = \emptyset$. Положим $V = Oy \cap Y$. Множество V является элементом γ и $V \cap U = \emptyset$. Следовательно, O_V — окрестность γ в βY, для которой $O_V \cap O_U = \emptyset$. Значит, $\gamma \notin [O_U]$ — θ-непрерывность f доказана.

Отображение f замкнуто как θ-непрерывное отображение бикомпакта на хаусдорфово пространство (см. [3]). Покажем, что f бикомпактно. Для этого достаточно проверить замкнутость прообразов $f^{-1}x$ для любого $x \in X$. Пусть $\eta \notin f^{-1}x$, т.е. $f(\eta) = y \neq x$. Пространство X хаусдорфово, следовательно, существует окрестность Oy такая, что $x \notin [Oy]$. В силу θ-непрерывности f найдется окрестность $O\eta \ni \eta$, для которой $f(O\eta) \subset [Oy]$. Значит, $f(O\eta) \not\ni x$ и, следовательно, $O\eta \cap f^{-1}x = \emptyset$. Заметим, наконец, что отображение f неприводимо, поскольку f тождественно отображает всюду плотное подмножество $Y \subset \beta Y$ на всюду плотное подмножество $Y \subset X$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть Y — вполне регулярное пространство, bY — его бикомпактное расширение, X — полурегулярное расширение Y, и пусть $f : bY \to X$ — θ-непрерывное отображение bY на X, которое тождественно на Y. Тогда X является OK-расширением пространства Y, причем Y s-вполне регулярно в X. Кроме того, отображение f θ-совершенно, неприводимо и каждая точка $y \in Y \subset bY$ является точкой взаимной однозначности f, т.е. $\{y\} = f^{-1}f(y)$.*

Доказательство. Замкнутость и бикомпактность отображения f в условиях теоремы сразу следуют из его θ-непрерывности (см. доказательство теоремы 1). Покажем, что f взаимно однозначно в точках $y \in Y$. Предположим противное. Пусть $x \in bY \setminus Y$, $y \in Y$ и $f(x) = f(y)$. Рассмотрим непересекающиеся окрестности U и V точек x и y в bY. В силу тождественности отображения f на Y имеем $f(V \cap Y) = V \cap Y$. Множество $V \cap Y$ является окрестностью точки y в Y. Следовательно, $\langle [V \cap Y]_X \rangle_X = Oy$ является окрестностью y в X. В силу θ-непрерывности отображения f существует окрестность $Ux \subset U$ точки x в bY такая, что $f(Ux) \subset [Oy]$. Следовательно, $f(Ux \cap Y) = Ux \cap Y \subset [Oy] = [V \cap Y]$, причем $Ux \cap Y \neq \emptyset$. С другой стороны, $Ux \cap Y \subset U \cap Y$ и $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \emptyset$, так что $(Ux \cap Y) \cap [V \cap Y] = \emptyset$ — противоречие.

Неприводимость f легко следует из взаимной однозначности f на Y.

Известно, что θ-непрерывный образ бикомпакта является H-замкнутым пространством (см. [2]). Так что пространство X есть H-замкнутое расширение Y. Остается проверить s-вполне регулярность Y в X.

Пусть x — точка из $X \setminus Y$. Положим $B = f^{-1}x$ и обозначим подпространства $B \cup Y \subset bY$ и $Y \cup \{x\} \subset X$ через Y_B и Y_x соответственно. Пусть Ox — произвольная канонически открытая окрестность точки x в X, и пусть $V = Ox \cap Y$. Покажем, что точка x функционально отделима в Y_x от множества $Y \setminus V$ — s-вполне регулярность Y тем самым будет доказана.

Рассмотрим множество $B \cup V$ в Y_B и покажем, что оно является окрестностью B в Y_B. В силу θ-непрерывности f существует окрестность OB множества B в bY, для которой $fOB \subset [Ox]$. Тогда $f^{\#}OB \subset Ox$, поскольку окрестность Ox канонически открыта. Далее

$$f(OB \cap Y_B) = f^{\#}(OB \cap Y_B) \subset Ox \cap Y_x = \{x\} \cup V.$$

Таким образом, $OB \cap Y_B \subset B \cup Y$ и, значит, $B \cup V$ открыто в Y_B. Пространство Y_B вполне регулярно, поэтому его бикомпактное подмножество B функционально отделимо от подмножества $Y \setminus V$, т.е. существует непрерывная функция $\varphi : Y_B \to [0,1]$ такая, что $\varphi(B) = \{0\}$ и $\varphi(y) = 1$ при $y \in Y \setminus V$. Определим теперь функцию $\psi : Y_x \to [0,1]$ по формуле

$$\psi(z) = \varphi(f^{-1}(z)),\ z \in Y_x.$$

Легко видеть, что ψ — искомая непрерывная функция на Y_x, отделяющая x от $Y \setminus V$. Теорема доказана.

Замечание. Требование полурегулярности пространства X в теореме 2 существенно. Рассмотрим следующий пример. Пусть

$$bY = \{(x,y) : |x| \le 1, |y| \le 1\}$$

— квадрат на плоскости, $Y = bY \setminus \{(0,0)\}$, и пусть на Y и bY задана обычная топология плоскости. В качестве хаусдорфова расширения X пространства Y возьмем тот же квадрат, только окрестности его присоединенной центральной точки $p = (0,0)$ зададим так:

$$Op = O(p,\varepsilon) \setminus \{(x,0) : |x| > 0\},\ \varepsilon > 0$$

(окрестности точки p — это круги с разрезом вдоль оси x). Легко видеть, что тождественное отображение $f : bY \to X$ удовлетворяет условиям теоремы, однако X не является OK-расширением Y.

Пусть bY — бикомпактное расширение вполне регулярного пространства Y, и пусть R — разбиение bY на замкнутые подмножества, все нетривиальные элементы которого лежат в наросте $bY \setminus Y$. Следуя В. В. Федорчуку [3], введем на фактор-множестве bY/R топологию следующим образом: объявим открытыми базисными множествами в bY/R множества вида $p^{\#}U$, где $p : bY \to bY/R$ — проекция и U — произвольное открытое подмножество в bY. Полученное топологическое пространство обозначим через $(bY/R, \#)$. Очевидно, что Y содержится в $(bY/R, \#)$ в качестве всюду плотного подмножества.

Теорема 3. *Для любого бикомпактного расширения bY вполне регулярного пространства Y и любого разбиения R пространства bY на замкнутые подмножества, все нетривиальные элементы которого лежат в $bY \setminus Y$, пространство $(bY/R, \#)$ является полурегулярным OK-расширением Y, причем Y s-вполне регулярно в $(bY/R, \#)$. Более того, расширения вида $(bY/R, \#)$ исчерпывают все полурегулярные OK-расширения пространства Y, в которых Y s-вполне регулярно.*

Доказательство. В силу результатов, полученных в [2], пространство $(bY/R, \#)$ является хаусдорфовым полурегулярным расширением Y, а отображение $p : bY \to (bY/R, \#)$ — θ-непрерывно. Следовательно, в силу теоремы 2 $(bY/R, \#)$ является OK-расширением Y, причем Y s-вполне регулярно в $(bY/R, \#)$.

Пусть теперь X — некоторое полурегулярное OK-расширение Y и Y s-вполне регулярно в X. В силу теоремы 1 существует θ-совершенное неприводимое отображение $f : \beta Y \to X$, которое тождественно на Y и, значит, для любой точки $y \in Y$ $f^{-1}f(y) = \{y\}$. Рассмотрим разбиение R пространства βY, элементами которого являются множества $f^{-1}x$, $x \in X$, и покажем, что расширение $X \supset Y$ гомеоморфно расширению $(\beta Y/R, \#)$. Для этого достаточно показать, что множества вида $f^{\#}U$, где U открыто в βY, образуют базу топологии X. Возьмем произвольное канонически открытое множество $V \subset X$ и точку $x \in V$. В силу θ-непрерывности f существует окрестность U множества $f^{-1}x$ в βY такая, что $f(U) \subset [V]$. Следовательно, $f^{\#}U \subset [V]$. В силу канонической открытости V $f^{\#}U \subset V$, кроме того, $x \in f^{\#}U$. Итак, множества $f^{\#}U$ образуют базу X. Теорема доказана.

Resume

In this paper have established a connection between OK-extensions in A. V. Archangelsky sense and H-closed extensions. It has given a description of all semy-regular OK-extensions of the completly regular space Y as of θ-perfect irreducible images of Stone-Čech extension βY.

Литература

[1] Архангельский А. В., Хамди М. М. Генеди. *Начала теории относительных топологических свойств*// Общая топология. Пространства и отображения. М.: Изд-во МГУ, 1989. С. 3–48.

[2] Илиадис С., Фомин С. *Метод центрированных систем в теории топологических пространств*// Успехи мат. наук. 1996. Т. 21. Вып. 4. С. 47–76.

[3] Федорчук В. В. *Об H-замкнутых расширениях пространств θ-близости*// Матем. сб. 1972. Т. 89(131). С. 400–418.

[4] Энгелькинг Р. *Общая топология*. М.: Мир, 1986.